Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης**,

Ημερομηνία: **2 Ιουνίου 2014**

**Απαντήσεις Θεμάτων**

## Θέμα Α

**Α1.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **251**

**Α2.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **273**

**Α3.** Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ. **259**

**Α4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Λάθος**

## Θέμα Β

**Β1.** Θέτουμε: $z = x + yi$ τότε θα έχουμε:

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + 2xyi - 4 - 2i = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xi - 2 - i = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xi = 2 + i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ ή } y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Επομένως, οι λύσεις είναι οι μιγαδικοί: $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 - i$.

**Β2.** Έχουμε:

$$w = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} \Leftrightarrow w = 3\left(\frac{2i}{2}\right)^{39} \Leftrightarrow w = 3 \cdot i^{4\cdot 9+3} \Leftrightarrow w = 3i^3 = -3i$$

**Β3.** Είναι :

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$
$$\Leftrightarrow |u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i|$$
$$\Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i|$$
$$\Leftrightarrow |u - (0 + 3i)| = 5$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών $u$ είναι ο κύκλος κέντρου $K(0,3)$ και ακτίνας $\rho = 5$ .

**Θέμα Γ**

**Γ1.** Η $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και συνάρτηση $1-1$

Η h'είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $και\ η$ $h''(x) = -\dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} \Leftrightarrow$

$h''(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η $h$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

**Γ2.**
Έχουμε:

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}$$
$$\Leftrightarrow ln\left(e^{h\left(2h'(x)\right)}\right) < ln\frac{e}{e+1}$$
$$\Leftrightarrow h\big(2h'(x)\big) < h(1)$$

Επειδή η $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισοδύναμα προκύπτει:

$$2h'(x) < 1$$
$$\Leftrightarrow h'(x) < h'(0)$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

διότι η $h'$ είναι γνησίως φθίνουσα, αφού η $h$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

**Γ3.**
Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}\right]$

Θέτω $u = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ , $u_0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1} = \lim\dfrac{e^x}{e^x} = 1$ , εφαρμόζοντας τον κανόνα $Dl'H$.

Άρα το ζητούμενο όριο είναι το: $\lim\limits_{u\to1} \ln u = \ln 1 = 0$

Επομένως η οριζόντια ασύμπτωτη της $C_h$ στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = 0$ .

Για την πλάγια ασύμπτωτη $(\varepsilon)\colon y = \lambda x + \beta$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\dfrac{e^x}{e^x+1}}\cdot\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x}\cdot\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1}{0+1} = 1$ άρα $\lambda = 1$ , εφαρμόζοντας τον κανόνα $DLH$ .

Έπίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-\lambda x] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x-\ln(e^x+1)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}[-\ln(e^x+1)]$ .

Θέτουμε $u = e^x$ , $u_0 = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ , οπότε το όριο γίνεται:

$\lim\limits_{u\to 0}[-\ln(u+1)] = \ln 1 = 0$

άρα $\beta = 0$ . Τελικά η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της $C_h$ στο $-\infty$.

**Γ4.** Βρίσκουμε τα σημεία τομής της $\varphi(x)$ με τον άξονα $x'x$. Είναι:

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) + ln2 = 0 \Leftrightarrow h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) = h(0) \Leftrightarrow x = 0$ αφού η $h$ είναι $1-1$.

$$E = \int_0^1 |e^x(h(x)+\ln 2)|\, dx$$

$$E = \int_0^1 \left|e^x\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2\right)\right|\, dx$$

$$E = \int_0^1 \left|e^x\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right|\, dx$$ και επειδή $\dfrac{2e^x}{e^x+1} > 1$ έχουμε:

$$E = \int_0^1 e^x\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\, dx$$

$$E = \int_0^1 (e^x)'\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\, dx$$

$$E = \int_0^1 \left[e^x\cdot\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\cdot\ \frac{e^x+1}{2e^x}\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)'\, dx$$

$$E = e\cdot\ln\frac{2e}{e+1} - \ln 1 - \int_0^1 \frac{(e^x+1)}{2}\cdot\frac{2e^x(e^x+1)-e^x\cdot 2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$E = e\cdot\ln\frac{2e}{e+1} - \int_0^1 \frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}}{2(e^x+1)}\, dx$$

$$E = e\cdot\ln\frac{2e}{e+1} - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$$

$$E = e\cdot\ln\frac{2e}{e+1} - [\ln(e^x+1)]_0^1$$

$$\boldsymbol{E = e \cdot \ln\frac{2e}{e+1} - \ln(e+1) + \ln 2 = \ e + (e+1)\cdot ln\left(\frac{2}{e+1}\right)} \quad \tau.\mu.$$

**Θέμα Δ**

**Δ1.** Είναι

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} e^x = 1 = f(0)$ χρησιμοποιώντας κανόνα $D.l'H$.

Επομένως η $f$ είναι συνεχής στο $x = 0$.

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με:

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = xe^x - e^x + 1, x \in \ \mathbb{R}$.

Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $g'(x) = xe^x$

Θέτουμε: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Για κάθε $x \in \ \mathbb{R}$ ισχύει: $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ με τη ισότητα να ισχύει για $x = 0$.

Συνεπώς: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και αφού $f$ είναι συνεχής στο $x = 0$,

η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**Δ2α.** Έστω η συνάρτηση

$$h(x) = \int_1^x f(u)du, \qquad x \in \ \mathbb{R}$$

Η $h$ είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = f(x) > 0, \ x \in \ \mathbb{R}$.
Πράγματι, για $x > 0$ είναι: $e^x - 1 > 0$ οπότε: $f(x) > 0$,

για $x < 0$ είναι: $e^x - 1 < 0$ οπότε: $f(x) > 0$ και αφού $f(0) = 1 > 0$ ισχύει: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, για το $f'(0)$ ε΄χουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

χρησιμοποιώντας κανόνα Dl'H.

Η εξίσωση γίνεται: $h\big(2f'(x)\big) = 0 \Leftrightarrow h\big(2f'(x)\big) = h(1) \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$, αφού η $h$ και η $f'$ είναι «1-1».

**β.** Για την τεταγμένη $y(t)$ του σημείου $M$ ισχύει:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{x(t)} - 1}{x(t)}, & \text{για } x(t) \neq 0 \\ 1, & \text{για } x(t) = 0 \end{cases}$$

Δηλαδή: $y(t) = f(x(t))$ και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$y'(t) = \begin{cases} f'\big(x(t)\big) \cdot x'(t), & \text{για } x(t) \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{για } x(t) = 0 \end{cases}$$

Ζητούνται τα σημεία για τα οποία: $y'(t) = \frac{1}{2}x'(t) \Leftrightarrow f'\big(x(t)\big) \cdot x'(t) = \frac{1}{2}x'(t)$
$\Leftrightarrow f'\big(x(t)\big) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'\big(x(t)\big) = f'(0) \Leftrightarrow x(t) = 0,$ αφού $f'$ έχει την ιδιότητα 1-1.
Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0,1)$.

Δ3. $g(x) = (e^x - 1 + 1 - e)^2(x-2)^2$ , $x > 0$ .

$g(x) = (e^x - e)^2(x-2)^2$ , $x > 0$ .

Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$g'(x) = 2(e^x - e)e^x(x-2)^2 + (e^x - e)^2 2(x-2)$

$g'(x) = 2(e^x - e)(x-2)[e^x(x-2) + e^x - e]$

$g'(x) = 2(e^x - e)(x-2)(xe^x - e^x - e)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = xe^x - e^x - e,$ με $x > 0$

Η $K$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$:

$K'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x > 0$ , για κάθε $x$ θετικό
άρα η $K(x)$είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ .

Παρατηρούμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} K(1) = -e < 0 \\ K(2) = e^2 - e > 0 \end{array}\right\} K(1)K(2) < 0$$

Επειδή $K$ συνεχής στο $[1,2]$ , από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $K(\rho) = 0$ και η $K(x)$ γνησίως μονότονη επομένως $\Leftrightarrow f'(x) = f'(0)$
η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = \rho$.

Για $1 < x < \rho$ ισχύει: $K(x) < K(\rho) \Leftrightarrow K(x) < 0$
Για $\rho < x < 2$ ισχύει: $K(x) > K(\rho) \Leftrightarrow K(x) > 0$
Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\rho$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x - e$ | | $-$ | ⊙ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | ⊙ | $+$ | |
| $K(x)$ | | $-$ | | $-$ | ⊙ | $+$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |

Ο πίνακας μεταβολών της $g$ είναι:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\rho$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | ⊙ | $+$ | ⊙ | $-$ | ⊙ | $+$ | |
| $g$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στα $[1,\rho]$ και $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(0,1]$ και $[\rho,2]$.
Η $g$ παρουσιάζει για $x=1$ και $x=2$ τοπικό ελάχιστο τα $g(1)$ και $g(2)$ αντίστοιχα.
Η $g$ παρουσιάζει για $x=\rho$ τοπικό μέγιστο το $g(\rho)$.

*Επιμέλεια: Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Ηρώ Μαρκάκη*